PART3　正領域・負領域

3　[1]　2点を A$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 2)$ とする。線分 AB が直線 $y=ax+1$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[2]　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の任意の点を P，直線 $y=-2x+6$ 上の任意の点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

Point Pickup

曲線 $f(x,\ y)=0$ に対し，$f(x,\ y)>0$ となる領域を「正領域」，$f(x,\ y)<0$ となる領域を「負領域」という。

[1]　直線 l：$f(x,\ y)=0$ と線分 AB が交わらない

$\iff$　2点 A，B がともに正領域 $f(x,\ y)>0$ にあるか，または
ともに負領域 $f(x,\ y)<0$ にある

[2]　点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

点 $(x_1,\ y_1)$ が $ax+by+c>0$ が表す領域にあるとき

$|ax_1+by_1+c|=ax_1+by_1+c$

点 $(x_1,\ y_1)$ が $ax+by+c<0$ が表す領域にあるとき

$|ax_1+by_1+c|=-(ax_1+by_1+c)$

第 7 講　PART3　確認問題

1　2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(3,\ -1)$ がある。線分 AB が直線 $y=a(x+3)$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

ア

① $a<-\dfrac{1}{6},\ 3<a$　　② $-\dfrac{1}{6}<a<3$

③ $a<-3,\ \dfrac{1}{6}<a$　　④ $-3<a<\dfrac{1}{6}$

⑤ $a<\dfrac{1}{6},\ 3<a$　　⑥ $\dfrac{1}{6}<a<3$

2　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$ 上の任意の点を P，直線 $y=-\dfrac{3}{4}x-1$ 上の任意の点を Q とする。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

最小値 $\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$

PART3　正領域・負領域

3　[1]　2点をA$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 2)$とする。線分ABが直線 $y=ax+1$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[2]　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の任意の点をP，直線 $y=-2x+6$ 上の任意の点をQとする。このとき，線分PQの長さの最小値を求めよ。

[1]　$f(x,\ y)=ax-y+1$ とおくと，求める条件は，2点A，Bがともに $f(x,\ y)>0$ の領域にあるか，ともに $f(x,\ y)<0$ の領域にあることである。

$f(-2,\ -1)>0$ かつ $f(3,\ 2)>0$　または　$f(-2,\ -1)<0$ かつ $f(3,\ 2)<0$

したがって $f(-2,\ -1)\times f(3,\ 2)>0$ より

$$(-2a+1+1)(3a-2+1)>0 \qquad (a-1)(3a-1)<0$$

よって，求める a の値の範囲は $\dfrac{1}{3}<a<1$

(別解)

$y=ax+1$ は，傾き a，y 切片1の直線を表す。

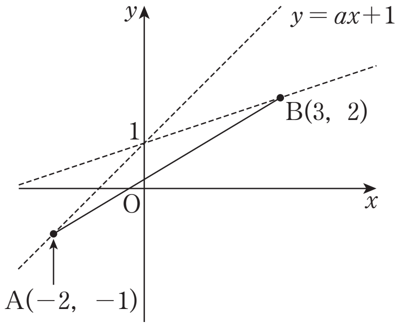
この直線が

点B$(3,\ 2)$を通るとき　$a=\dfrac{1}{3}$

点A$(-2,\ -1)$を通るとき　$a=1$

よって右図より，求める a の値の範囲は

$$\frac{1}{3}<a<1$$



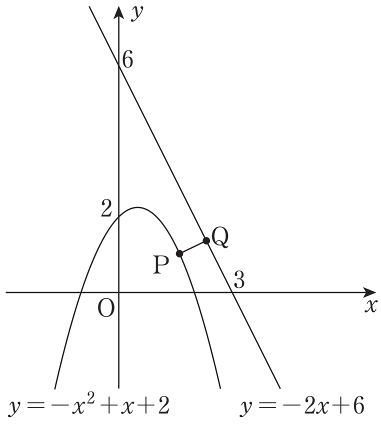
[2]　点Pの座標は $\left(t,\ -t^2+t+2\right)$ と表される。

求める線分PQの長さの最小値は，点Pと直線 $y=-2x+6$　すなわち　$2x+y-6=0$ の距離 d の最小値である。

$$d=\frac{|2t-t^2+t+2-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-t^2+3t-4|}{\sqrt{5}}$$

ここで右図より，点 $\mathrm{P}\left(t,\ -t^2+t+2\right)$ は，

領域 $y<-2x+6$　すなわち　$2x+y-6<0$ にある。



したがって　$2t-t^2+t+2-6<0$　　つまり　$-t^2+3t-4<0$

このとき　$d=\dfrac{t^2-3t+4}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$

よって，d は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$ をとる。

したがって，求める最小値は $\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$ である。

第 7 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$f(x,\ y)=a(x+3)-y$ とする。

線分 AB が直線 $y=a(x+3)$ と共有点をもたないのは，2 点 A，B がともに $f(x,\ y)>0$ の領域にあるとき，または，ともに $f(x,\ y)<0$ の領域にあるときである。 [A] [B]

よって

$$f(-2,\ 3)>0 \text{ かつ } f(3,\ -1)>0$$

または

$$f(-2,\ 3)<0 \text{ かつ } f(3,\ -1)<0$$

したがって　$f(-2,\ 3)\times f(3,\ -1)>0$ [C]

ゆえに　$\{a(-2+3)-3\}\{a(3+3)-(-1)\}>0$

$$(a-3)(6a+1)>0$$

よって，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a<-\frac{1}{6},\ 3<a}$$

（別解）

$y=a(x+3)$ は，傾きが a で点 $(-3,\ 0)$ を通る直線を表す。

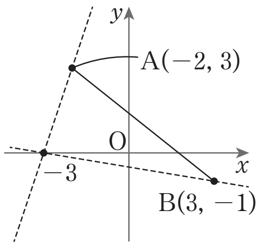
この直線が

点 A$(-2,\ 3)$ を通るとき　$a=3$

点 B$(3,\ -1)$ を通るとき　$a=-\dfrac{1}{6}$

よって，右図から，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a<-\frac{1}{6},\ 3<a}$$



[A]　正領域・負領域
曲線 $f(x,\ y)=0$ に対し，
$f(x,\ y)>0$ の表す領域を「正領域」，
$f(x,\ y)<0$ の表す領域を「負領域」
という。

[B]　直線 $f(x,\ y)=0$ と線分 AB が共有点をもたない
$\Longleftrightarrow$ 2 点 A，B がともに正領域 $f(x,\ y)>0$ にあるか，または ともに負領域 $f(x,\ y)<0$ にある

[C]　$AB>0$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

$AB<0$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$

2 [正解] イウ：11，エ：8

[解説]

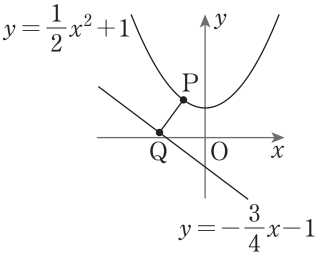
点Ｐの座標は，実数 t を用いて，$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+1\right)$ と表される。

求める線分 PQ の長さの最小値は，点Ｐと直線

$y=-\frac{3}{4}x-1$ すなわち $3x+4y+4=0$ の距離 d の最小値である。

$$d=\frac{\left|3t+4\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)+4\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|2t^2+3t+8|}{5}$$ [D]

ここで右図より，



点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2+1\right)$ は領域

$y>-\frac{3}{4}x-1$ すなわち

$3x+4y+4>0$ にある。

したがって

$3t+4\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)+4>0$ すなわち

$$2t^2+3t+8>0$$

このとき

$$d=\frac{2t^2+3t+8}{5}=\frac{2}{5}\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{8}$$ [D]

よって，求める最小値は $\boldsymbol{\frac{11}{8}}$

> [D]　点と直線の距離
> 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
> 点 $(x_1,\ y_1)$ が領域 $ax_1+by_1+c>0$ にあるとき
> $$|ax_1+by_1+c|=ax_1+by_1+c$$
> 点 $(x_1,\ y_1)$ が領域 $ax_1+by_1+c<0$ にあるとき
> $$|ax_1+by_1+c|=-(ax_1+by_1+c)$$